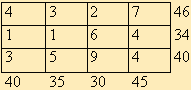
# **Задача 1.**

**Лабораторная работа №4.2**

# **Открытые модели ТЗ и усложнения в ее постановке**



1. Полностью удовлетворить В2.
2. Заблокировать клетку А1В4.

# **Решение:**

Вычислим суммарные запасы и потребности:

𝑚

∑ 𝑎𝑖 = 46 + 34 + 40 = 120

𝑖=1

𝑛

∑ 𝑏𝑗 = 40 + 35 + 30 + 45 = 150

𝑗=1

𝑚 𝑛

∑ 𝑎𝑖 < ∑ 𝑏𝑗

𝑖=1 𝑗=1

Суммарные потребности превышают суммарные запасы, это означает, что ТЗ является открытой, следовательно для того, чтобы получить закрытую модель, вводится

фиктивный поставщик, запасы которого 𝑎4 = ∑𝑛

𝑏𝑗 − ∑𝑚

𝑎𝑖 = 150 − 120 = 30

Составим распределительную таблицу:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 4 |  | 3 |  | 2 |  | 7 | 46 |
|  | | **16** | | **30** | | **М** | |
| **A2** |  | 1 |  | 1 |  | 6 |  | 4 | 34 |
| **34** | |  | |  | |  | |
| **A3** |  | 3 |  | 5 |  | 9 |  | 4 | 40 |
| **6** | |  | |  | | **34** | |
| **A4** |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 | 30 |
|  | | **19** | |  | | **11** | |
| **bj** | 40 | | 35 | | 30 | | 45 | | 150 |

𝑛 + 𝑚 − 1 = 4 + 4 − 1 = 7, что совпадает с количеством занятых клеток т.е. получен невырожденный план.

𝑍 = 16 ∗ 3 + 30 ∗ 2 + 34 ∗ 1 + 6 ∗ 3 + 34 ∗ 4 + 19 ∗ 0 + 11 ∗ 0 = 296

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣2 = 3 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = −1 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣3 = 2 |  | 𝑢3 = 1 |
| 𝑢2 + 𝑣1 = 1 |  | 𝑢4 = −3 |
| 𝑢3 + 𝑣1 = 3 |  | 𝑣1 = 2 |
| 𝑢3 + 𝑣4 = 4 |  | 𝑣2 = 3 |
| 𝑢4 + 𝑣2 = 0 |  | 𝑣3 = 2 |
| 𝑢4 + 𝑣4 = 0 |  | 𝑣4 = 3 |

| 46 | **0** |
| --- | --- |
| 34 | **-1** |
| 40 | **1** |
| 30 | **-3** |
| 150 |  |

∆𝑐𝑖𝑗 = ∆𝑐22 = −1 < 0, следовательно **план не является оптимальным**

∆𝑥 = min(34; 19; 34) = 19

Получим новый опорный план:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 4 |  | 3 |  | 2 |  | 7 | 46 |
|  | | **16** | | **30** | | **М** | |
| **A2** |  | 1 |  | 1 |  | 6 |  | 4 | 34 |
| **15** | | **19** | |  | |  | |
| **A3** |  | 3 |  | 5 |  | 9 |  | 4 | 40 |
| **25** | |  | |  | | **15** | |
| **A4** |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 | 30 |
|  | |  | |  | | **30** | |
| **bj** | 40 | | 35 | | 30 | | 45 | | 150 |

𝑛 + 𝑚 − 1 = 4 + 4 − 1 = 7, что совпадает с количеством занятых клеток т.е. получен невырожденный план.

𝑍 = 16 ∗ 3 + 30 ∗ 2 + 15 ∗ 1 + 19 ∗ 1 + 25 ∗ 3 + 15 ∗ 4 + 30 ∗ 0 = 277

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣2 = 3 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = −2 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣3 = 2 |  | 𝑢3 = 0 |
| 𝑢2 + 𝑣1 = 1 |  | 𝑢4 = −4 |
| 𝑢2 + 𝑣2 = 1 |  | 𝑣1 = 3 |
| 𝑢3 + 𝑣1 = 3 |  | 𝑣2 = 3 |
| 𝑢3 + 𝑣4 = 4 |  | 𝑣3 = 2 |
| 𝑢4 + 𝑣4 = 0 |  | 𝑣4 = 4 |

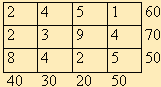
| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **ai** | ***u*** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 4 |  | 3 |  | 2 |  | 7 | 46 | **0** |
| **1** | | **16** | | **30** | | **М** | |
| **A2** |  | 1 |  | 1 |  | 6 |  | 4 | 34 | **-2** |
| **15** | | **19** | | **6** | | **2** | |
| **A3** |  | 3 |  | 5 |  | 9 |  | 4 | 40 | **0** |
| **25** | | **2** | | **7** | | **15** | |
| **A4** |  | 0 |  | 0 |  | 0 |  | 0 | 30 | **-4** |
| **1** | | **1** | | **2** | | **30** | |

| **bj** | 40 | 35 | 30 | 45 | 150 |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| ***v*** | **3** | **3** | **2** | **4** |  |  |

Все разности ∆𝑐𝑖𝑗 ≥ 0, следовательно, **план является оптимальным**

𝑍𝑚𝑖𝑛 = 277

# **Задача 2.**



1. Из А3 в В4 доставить 20 ед. груза.
2. Вывезти полностью груз из А3.

# **Решение:**

Вычислим суммарные запасы и потребности:

𝑚

∑ 𝑎𝑖 = 60 + 70 + 50 = 180

𝑖=1

𝑛

∑ 𝑏𝑗 = 40 + 30 + 20 + 50 = 140

𝑗=1

𝑚 𝑛

∑ 𝑎𝑖 > ∑ 𝑏𝑗

𝑖=1 𝑗=1

Суммарные запасы превышают суммарные потребности, это означает, что ТЗ является открытой, следовательно для того, чтобы получить закрытую модель, вводится

фиктивный потребитель, потребности которого

𝑚 𝑛

𝑏5 = ∑ 𝑎𝑖 − ∑ 𝑏𝑗 = 180 − 140 = 40

𝑖=1 𝑗=1

Составим распределительную таблицу:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 4 |  | 5 |  | 1 |  | 0 | 60 |
| **30** | |  | |  | | **30** | |  | |
| **A2** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 4 |  | 0 | 70 |
| **10** | | **20** | |  | |  | | **40** | |
| **A3** |  | 8 |  | 4 |  | 2 |  | 5 |  | 0 | 50 |
|  | | **10** | | **20** | | **20** | |  | |
| **bj** | 40 | | 30 | | 20 | | 50 | | 40 | | 180 |

Выполнив дополнительные условия, составим новую таблицу, исключив из нее A3 и B3 и изменив потребности b2 и b4:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 4 |  | 1 |  | 0 | 60 |
| **30** | |  | | **30** | | **0** | |
| **A2** |  | 2 |  | 3 |  | 4 |  | 0 | 70 |
| **10** | | **20** | |  | | **40** | |
| **bj** | 40 | | ~~30~~ 20 | | ~~50~~ 30 | | 40 | | 130 |

𝑛 + 𝑚 − 1 = 5 + 2 − 1 = 6 > 5, т.е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «0» пустую клетку 𝐴1𝐵5, т.к. она имеет минимальный тариф (𝑐15 = 0)

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣1 = 2 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = 0 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣4 = 1 |  | 𝑣1 = 2 |
| 𝑢1 + 𝑣5 = 0 |  | 𝑣2 = 3 |
| 𝑢2 + 𝑣1 = 2 |  | 𝑣4 = 1 |
| 𝑢2 + 𝑣2 = 3 |  | 𝑣5 = 0 |
| 𝑢2 + 𝑣5 = 0 |  |  |

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B4** | | **B5** | | **ai** | ***u*** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 4 |  | 1 |  | 0 | 60 | **0** |
| **30** | | **1** | | **30** | | **0** | |
| **A2** |  | 2 |  | 3 |  | 4 |  | 0 | 70 | **0** |
| **10** | | **20** | | **3** | | **40** | |
| **bj** | 40 | | ~~30~~ 20 | | ~~50~~ 30 | | 40 | | 130 |  |
| ***v*** | **2** | | **3** | | **1** | | **0** | |  |  |



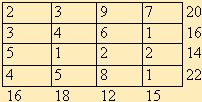
Все разности ∆𝑐𝑖𝑗 ≥ 0, следовательно, **план является оптимальным**

Учитывая строку A3 и столбец B3, получим решение:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 4 |  | 5 |  | 1 |  | 0 | 60 |
| **30** | |  | |  | | **30** | |  | |
| **A2** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 4 |  | 0 | 70 |
| **10** | | **20** | |  | |  | | **40** | |
| **A3** |  | 8 |  | 4 |  | 2 |  | 5 |  | 0 | 50 |
|  | | **10** | | **20** | | **20** | |  | |
| **bj** | 40 | | 30 | | 20 | | 50 | | 40 | | 180 |

𝑍𝑚𝑖𝑛 = 30 ∗ 2 + 10 ∗ 2 + 20 ∗ 3 + 10 ∗ 4 + 20 ∗ 2 + 30 ∗ 1 + 20 ∗ 5 + 40 ∗ 0 = 350

# **Задача 3.**



1. Из А2 в В4 доставить не более 10 ед. груза.

# **Решение:**

Вычислим суммарные запасы и потребности:

𝑚

∑ 𝑎𝑖 = 20 + 16 + 14 + 22 = 72

𝑖=1

𝑛

∑ 𝑏𝑗 = 16 + 18 + 12 + 15 = 61

𝑗=1

𝑚 𝑛

∑ 𝑎𝑖 > ∑ 𝑏𝑗

𝑖=1 𝑗=1

Суммарные запасы превышают суммарные потребности, это означает, что ТЗ является открытой, следовательно для того, чтобы получить закрытую модель, вводится

фиктивный потребитель, потребности которого

𝑚 𝑛

𝑏5 = ∑ 𝑎𝑖 − ∑ 𝑏𝑗 = 72 − 61 = 11

𝑖=1 𝑗=1

Составим распределительную таблицу:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 7 |  | 0 | 20 |
| **16** | | **4** | |  | |  | |  | |
| **A2** |  | 3 |  | 4 |  | 6 |  | 1 |  | 0 | 16 |
|  | |  | | **12** | | **4** | |  | |
| **A3** |  | 5 |  | 1 |  | 2 |  | 2 |  | 0 | 14 |
|  | | **14** | |  | |  | | **0** | |
| **A4** |  | 4 |  | 5 |  | 8 |  | 1 |  | 0 | 22 |
|  | |  | |  | | **11** | | **11** | |
| **bj** | 16 | | 18 | | 12 | | 15 | | 11 | | 72 |

𝑛 + 𝑚 − 1 = 5 + 4 − 1 = 8 > 7, т.е. получен вырожденный план. Следовательно, заполняем числом «0» пустую клетку 𝐴1𝐵5, т.к. она имеет минимальный тариф (𝑐15 = 0)

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣1 = 2 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = −2 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣2 = 3 |  | 𝑢3 = −2 |
| 𝑢2 + 𝑣3 = 6 |  | 𝑢4 = −2 |
| 𝑢2 + 𝑣4 = 1 |  | 𝑣1 = 2 |
| 𝑢3 + 𝑣2 = 1 |  | 𝑣2 = 3 |
| 𝑢3 + 𝑣5 = 0 |  | 𝑣3 = 8 |
| 𝑢4 + 𝑣4 = 1 |  | 𝑣4 = 3 |
| 𝑢4 + 𝑣5 = 0 |  | 𝑣5 = 2 |

|  | | | |  |  |  |  |  |  |  | |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **3** |  | **3** |  | **12** | − | **4** |  | **+** | **0** |
|  | 5 |  | 1 |  | 2 |  |  | 2 |  |  | 0 |
| **5** |  | **14** |  | **-4** | **+** | **1** |  |  | **0** |  | − |

∆𝑐𝑖𝑗 = ∆𝑐33 = −4 < 0, следовательно **план не является оптимальным**

∆𝑥 = min(12; 11; 0) = 0

Получим новый опорный план:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 7 |  | 0 | 20 |
| **16** | | **4** | |  | |  | |  | |
| **A2** |  | 3 |  | 4 |  | 6 |  | 1 |  | 0 | 16 |
|  | |  | | **12** | | **4** | |  | |
| **A3** |  | 5 |  | 1 |  | 2 |  | 2 |  | 0 | 14 |
|  | | **14** | | **0** | |  | |  | |
| **A4** |  | 4 |  | 5 |  | 8 |  | 1 |  | 0 | 22 |
|  | |  | |  | | **11** | | **11** | |
| **bj** | 16 | | 18 | | 12 | | 15 | | 11 | | 72 |

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣1 = 2 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = 2 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣2 = 3 |  | 𝑢3 = −2 |
| 𝑢2 + 𝑣3 = 6 |  | 𝑢4 = 2 |
| 𝑢2 + 𝑣4 = 1 |  | 𝑣1 = 2 |
| 𝑢3 + 𝑣2 = 1 |  | 𝑣2 = 3 |
| 𝑢3 + 𝑣3 = 2 |  | 𝑣3 = 4 |

𝑢4 + 𝑣4 = 1 𝑣4 = −1

𝑢4 + 𝑣5 = 0 𝑣5 = −2

∆𝑐𝑖𝑗 = ∆𝑐21 = −1 < 0, следовательно **план не является оптимальным**

∆𝑥 = min(16; 14; 12) = 12

Получим новый опорный план:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 7 |  | 0 | 20 |
| **4** | | **16** | |  | |  | |  | |
| **A2** |  | 3 |  | 4 |  | 6 |  | 1 |  | 0 | 16 |
| **12** | |  | |  | | **4** | |  | |
| **A3** |  | 5 |  | 1 |  | 2 |  | 2 |  | 0 | 14 |
|  | | **2** | | **12** | |  | |  | |
| **A4** |  | 4 |  | 5 |  | 8 |  | 1 |  | 0 | 22 |
|  | |  | |  | | **11** | | **11** | |
| **bj** | 16 | | 18 | | 12 | | 15 | | 11 | | 72 |

Составим систему уравнений потенциалов:

| 𝑢1 + 𝑣1 = 2 | Полагая 𝑢1 = 0, найдем | 𝑢2 = 1 |
| --- | --- | --- |
| 𝑢1 + 𝑣2 = 3 |  | 𝑢3 = −2 |
| 𝑢2 + 𝑣1 = 3 |  | 𝑢4 = 1 |
| 𝑢2 + 𝑣4 = 1 |  | 𝑣1 = 2 |

𝑢3 + 𝑣2 = 1 𝑣2 = 3

𝑢3 + 𝑣3 = 2 𝑣3 = 4

𝑢4 + 𝑣4 = 1 𝑣4 = 0

𝑢4 + 𝑣5 = 0 𝑣5 = −1

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **ai** | ***u*** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 2 |  | 3 |  | 9 |  | 7 |  | 0 | 20 | **0** |
| **4** | | **16** | | **5** | | **7** | | **1** | |
| **A2** |  | 3 |  | 4 |  | 6 |  | 1 |  | 0 | 16 | **1** |
| **12** | | **0** | | **1** | | **4** | | **0** | |
| **A3** |  | 5 |  | 1 |  | 2 |  | 2 |  | 0 | 14 | **-2** |
| **5** | | **2** | | **12** | | **4** | | **3** | |
| **A4** |  | 4 |  | 5 |  | 8 |  | 1 |  | 0 | 22 | **1** |
| **1** | | **1** | | **3** | | **11** | | **11** | |
| **bj** | 16 | | 18 | | 12 | | 15 | | 11 | | 72 |  |
| ***v*** | **2** | | **3** | | **4** | | **0** | | **-1** | |  |  |

Все разности ∆𝑐𝑖𝑗 ≥ 0, следовательно, **план является оптимальным**

𝑍𝑚𝑖𝑛 = 4 ∗ 2 + 16 ∗ 3 + 12 ∗ 3 + 4 ∗ 1 + 2 ∗ 1 + 12 ∗ 2 + 11 ∗ 1 + 11 ∗ 0 = 133

# **Задача 4.**



|  | | 2 |  |  | 3 |  | 9 |  | 7 |  | 0 |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **16** |  | − | **4** |  | **+** | **5** |  | **8** |  | **2** |  |
|  |  | 3 |  |  | 4 |  | 6 |  | 1 |  | 0 |
|  | |  |  |  |  |  | | | |
| **-1** | **+** | **3** |  | **12** | − | **4** |  | **0** |  |
|  | 5 |  | 1 |  | 2 |  | 2 |  | 0 |
| **5** |  | **14** | − | **0** | **+** | **5** |  | **4** |  |
|  | 4 |  | 5 |  | 8 |  | 1 |  | 0 |
| **0** |  | **0** |  | **2** |  | **11** |  | **11** |  |
| 20 | **0** |
| 16 | **2** |
| 14 | **-2** |
| 22 | **2** |

1. Из А2 в В5 доставить не менее 30 ед.

# **Решение:**

Вычислим суммарные запасы и потребности:

𝑚

∑ 𝑎𝑖 = 30 + 35 + 45 + 40 = 150

𝑖=1

𝑛

∑ 𝑏𝑗 = 10 + 35 + 15 + 25 + 55 + 10 = 150

𝑗=1

𝑚 𝑛

∑ 𝑎𝑖 = ∑ 𝑏𝑗

𝑖=1 𝑗=1

Суммарные запасы и потребности совпадают, следовательно, модель ТЗ является закрытой.

Составим распределительную таблицу:

| **Bj**  **Ai** | **B1** | | **B2** | | **B3** | | **B4** | | **B5** | | **B6** | | **ai** | ∆𝐜**ij** |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **A1** |  | 3 |  | 7 |  | 5 |  | 1 |  | 4 |  | 9 | 30 | **2, 2, 1,**  **1, В** |
|  | |  | | **5** | | **25** | |  | |  | |
| **A2** |  | 7 |  | 5 |  | 8 |  | 6 |  | 3 |  | 4 | 35 | **1, 1, 1,**  **1, 3, В** |
|  | |  | |  | |  | | **30** | | **5** | |
| **A3** |  | 6 |  | 4 |  | 8 |  | 3 |  | 2 |  | 5 | 45 | **1, 1, 3,**  **1, 1** |
| **5** | |  | | **10** | |  | | **25** | | **5** | |
| **A4** |  | 3 |  | 1 |  | 7 |  | 4 |  | 2 |  | 3 | 40 | **1, 1, 1,**  **1, В** |
| **5** | | **35** | |  | |  | |  | |  | |
| **bj** | 10 | | 35 | | 15 | | 25 | | 55 | | 10 | | 150 |  |
| ∆𝐜**ij** | **0, 0, 3, 1** | | **3, В** | | **2, 2, 1, 0** | | **2, В** | | **0, 1, 1,**  **3, В** | | **1, 1, 1,**  **1** | |  |  |

𝑍 = 5 ∗ 5 + 25 ∗ 1 + 30 ∗ 3 + 5 ∗ 4 + 5 ∗ 6 + 10 ∗ 8 + 25 ∗ 2 + 5 ∗ 5 + 5 ∗ 3 + 35 ∗ 1 =

= 395